





Потенциал и составляющие напряженности стержня с осью, заданной вектором  $\vec{l} = \vec{q}\vec{m}$ , определим в точке  $p$ , расположенной вне источника в однородной среде с удельным сопротивлением  $\rho$  и заданной векторами  $\vec{r}_1 = \vec{p}\vec{q}$  и  $\vec{r}_2 = \vec{p}\vec{m} = \vec{r}_1 + \vec{l}$  (рис. 1). Для упрощения расчетов перейдем к локальной системе координат  $oxy$ , в которой точка  $p$  принадлежит оси  $y$ , а ось  $x$  совпадает с осью стержня в направлении  $|\vec{r}_2| \geq |\vec{r}_1|$  (рис. 1). Тогда

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{\tau\rho}{4\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\tau\rho}{4\pi} \ln\left(\frac{x_2+r_2}{x_1+r_1}\right) = \alpha\tau; \\ e_x &= \frac{\tau\rho}{4\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{\tau\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right); \\ e_y &= \frac{\tau\rho}{4\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{\tau\rho}{4\pi y} \left(\frac{x_2}{r_2} - \frac{x_1}{r_1}\right); \\ r_1 &= |\vec{r}_1|; r_2 = |\vec{r}_2|; \vec{i} = \vec{l} / |\vec{l}|; x_1 = \vec{r}_1 \vec{i}; x_2 = \vec{r}_2 \vec{i}; \\ \vec{n} &= x_1 \vec{i} - \vec{r}_1 = x_2 \vec{i} - \vec{r}_2; y = |\vec{n}|; \vec{j} = \vec{n} / |\vec{n}|. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Выражение для потенциала (1) инвариантно к системе отсчета, а вектор напряженности легко преобразуется в исходную трехмерную систему координат:

$$\vec{E} = e_x \vec{i} + e_y \vec{j}, \quad (2)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}$  – единичные орты локальной системы.

Таким образом, расчет дифференциальных характеристик электрического поля стержня в однородной среде сводится к операциям с векторами. Вкладывая в понятие вектора арифметический смысл, при практических расчетах выражение потенциального коэффициента из (1) представим в виде функции:

$$\alpha(p, q, l) = \frac{\rho}{4\pi} \ln \left( \frac{(q+l-p)l + |q+l-p||l|}{(q-p)l + |q-p||l|} \right), \quad (3)$$

где  $p = (x_p, y_p, z_p)^T$ ,  $q = (x_q, y_q, z_q)^T$  – трехмерные координаты (векторы) точки наблюдения и начала стержня;  $l = (x_l, y_l, z_l)^T$  – вектор, направленный из начала в конец стержня.

Потенциальный коэффициент с учетом влияния земли

$$\alpha'(p, q, l) = \alpha(p, q, l) + \alpha(p, q', l'), \quad (4)$$

где  $q' = (x_q, y_q, -z_q)^T$ ,  $l' = (x_l, y_l, -z_l)^T$  – зеркальные векторы.

Аналогично (3) и (4) записываются функции для расчета вектора напряженности (2).

Рассмотрим два возможных подхода к расчету потенциальных коэффициентов между двумя стержнями, не имеющими пересечений во внутренних точках. В первом случае искомый коэффициент отождествляется с потенциальным коэффициентом между стержнем–источником и точкой, расположенной в середине стержня наблюдения, и определяется выражением (4). Собственный потенциальный коэффициент в однородной среде  $\alpha_0 = \rho / 2\pi \ln(L/R)$ .

Вторым способом является метод среднего потенциала, предусматривающий усреднение потенциала по длине стержня для повышения точности расчета [1]. Действительно, погрешность определения сопротивления вертикального стержня длиной 5 м, диаметром 0,012 м уменьшается на 4,3% по сравнению с первым способом. Однако в сложных заземлителях наличие большого числа пересекающихся стержней приводит к резко неравномерному распределению плотности тока, поэтому эффективность применения метода среднего потенциала, полученного в предположении постоянства плотности тока, снижается. Численный эксперимент, выполненный при расчете пяти сложных заземлителей в однородной земле, показал, что метод среднего потенциала приводит к незначительному (менее 0,5%) изменению сопротивления заземлителя при неизменном потенциале на поверхности земли. К аналогичным результатам приводит решение задач в двухслойной земле. Таким образом, метод среднего потенциала может оказаться избыточным при расчете сложных заземлителей. В дальнейшем ограничимся простейшим методом, а вопросы точности будут решаться дополнительным дроблением стержней.

Для расчета электрического поля, создаваемого стержнем с током в двухслойной земле с параллельными плоскими границами, воспользуемся методом зеркальных изображений. Вначале напомним, что в простейшей системе двух полубесконечных сред с удельными сопротивлениями  $\rho_1, \rho_2$  (рис. 2) влияние наведенных токов границы можно заменить двумя фиктивными источниками:

$$\tau_2 = \lambda\tau; \tau_3 = (1-\lambda)\tau; \lambda = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}. \quad (5)$$

Система из реального тока  $\tau$  и зеркального тока  $\tau_2$ , находящаяся в однородной среде с удельным сопротивлением  $\rho_1$ , служит для расчета поля в полуплоскости с реальным током. Источник  $\tau_3$ , расположенный на месте реального тока в однородной среде с удельным сопротивлением  $\rho_2$ , предназначен для расчета поля в другой полуплоскости. Для воздушной среды  $\rho_2 = \infty$  и имеет место только зеркальный ток  $\tau_2 = \tau, \tau_3 = 0$ .

В двухслойной модели земли присутствуют три среды, поэтому для нахождения потенциального коэффициента  $\alpha_{11}$  в верхнем слое земли расположенный здесь источник тока (рис. 3,а) будет зеркально отражаться сразу от двух границ. Но, поскольку любое отражение относительно одной границы нарушает симметрию относительно другой, то возникают многократные отражения, в результате которых приходим к бесконечной системе попарно зеркальных токов (рис. 3,б). При отражении от верхней границы значение тока не меняется, от нижней границы — изменяется в  $\lambda$  раз.

Потенциальный коэффициент  $\alpha_{21}$  в точках нижнего слоя от источника в верхнем слое согласно (5) обусловлен системой токов, расположенных на месте источников предыдущей системы выше нижней границы и отличающихся по значению множителем  $(1-\lambda)$  (рис. 3,в). Верхняя граница не соприкасается с нижним слоем земли, где проводится расчет поля, поэтому отражений не создает.

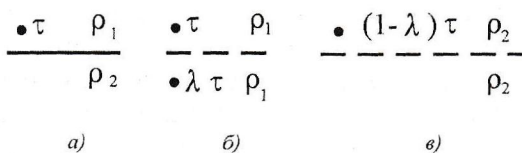


Рис. 2. Приведение неоднородной среды (а) к однородной для расчета в верхней полуплоскости (б) и нижней (в)

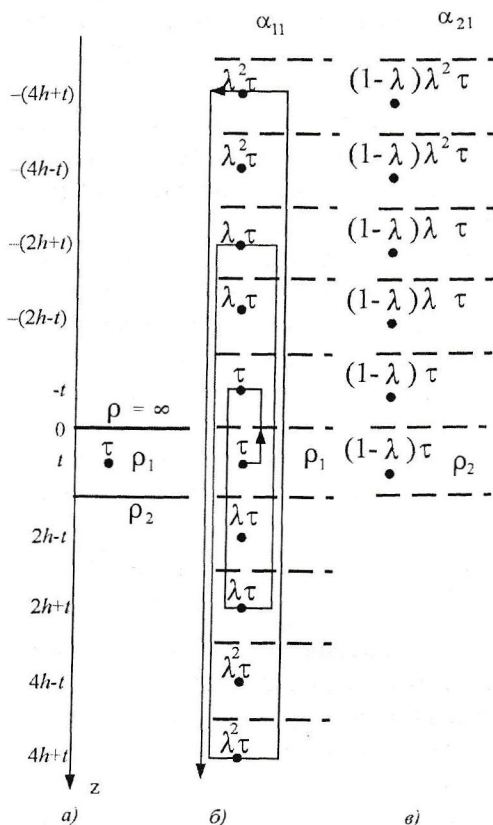


Рис. 3. Приведение двухслойной земли с источником в верхнем слое (а) к однородной среде для расчета в верхнем (б) и нижнем (в) слое

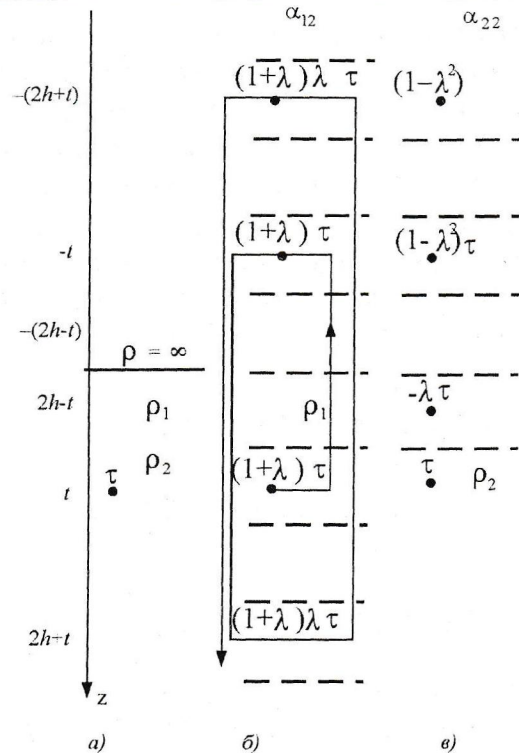


Рис. 4. Приведение двухслойной земли с источником в нижнем слое (а) к однородной среде для расчета в верхнем (б) и нижнем (в) слое

Для определения коэффициентов  $\alpha_{12}$  расчетная точка находится в верхнем слое, а источник — в нижнем слое земли (рис. 4,а), что приводит к изменению знака множителя  $\lambda$  условия (5). На место реального тока помещаем фиктивный источник  $\tau_3 = (1+\lambda)\tau$  и, выполнив аналогично  $\alpha_{11}$  многократные зеркальные отражения от двух границ, получаем бесконечную систему попарно зеркальных токов (рис. 4,б). Система токов для определения коэффициентов  $\alpha_{22}$  в нижнем слое земли от расположенного здесь источника состоит из реального тока, его зеркального отображения  $\tau_2 = -\lambda\tau$ , а также токов  $\tau_3$  условия (5), расположенных на месте источников предыдущей системы выше нижней границы и отличающихся множителем  $(1-\lambda)$  (рис. 4,в). В последнем случае знак множителя  $\lambda$  остается без изменений, поскольку положение токов в средах соответствует (5). Верхняя граница не соприкасается с нижним слоем земли, поэтому отражений не создает.

Пусть в результате дискретизации заземлителя каждый элементарный стержень находится только в одном из слоев земли. Тогда на основе найденных систем точечных источников (рис. 3, 4) потенциальные коэффициенты между стержнем и точкой в двухслойной земле выражаются по принципу суперпозиции через аналогичные функции (3) и (4) для однородной земли:



$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11}(p,q,l) &= \alpha'(p,q,l) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k [\alpha'(p,q + \\ &+ 2kh,l) + \alpha'(p,q' + 2kh,l')]; \\ \alpha_{21}(p,q,l) &= (1-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k [\alpha(p,q - \\ &- 2kh,l) + \alpha(p,q' - 2kh,l')]; \\ \alpha_{22}(p,q,l) &= \alpha(p,q,l) - \lambda \alpha(p,q' + 2h,l') + \\ &+ (1-\lambda^2) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (\alpha(p,q' - 2kh,l'); \\ \alpha_{12}(p,q,l) &= (1-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \alpha'(p,q + 2kh,l), \end{aligned} \right\} (6)$$

где  $h=(0,0,h)^T$ ;  $h_z$  – мощность верхнего слоя земли;  $p$  – трехмерная координата точки наблюдения;  $q, q'$  – координаты начала стержня и его зеркального отображения;  $l, l'$  – вектор, направленный из начала в конец стержня, и его зеркальное изображение.

Аналогично (6) с использованием (2) записываются соотношения для вектора напряженности.

Достоверность полученных выражений подтверждается совпадением сопротивлений вертикальных стержней в двухслойной земле, рассчитанных с помощью (6) и по известным формулам [1], а также найденных методом интегральных уравнений.

Ряды (6) являются абсолютно сходящимися в практическом диапазоне параметра  $|\lambda| < 1$ , поскольку мажорируются геометрической прогрессией со знаменателем  $q=|\lambda| < 1$  [1]:

$$\alpha = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k F_k < F_0 + F_1 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k = F_0 + F_1 \frac{\lambda}{1-\lambda},$$

отсюда верхняя оценка числа членов ряда, гарантирующих заданную погрешность  $\delta$ , равна [1]:

$$n = \text{Round} \left[ \frac{\ln(\delta |F_0(1-\lambda) / F_1 + \lambda|)}{\ln|\lambda|} - 1 \right]. \quad (7)$$

Свойства рядов (6) проанализируем также на модельной задаче, в которой вертикальный стержень длиной  $h$  полностью расположен в верхнем слое двухслойной земли при нулевой глубине погружения. Тогда бесконечный ряд при расчете потенциального коэффициента  $\alpha_{11}$  (6) (без постоянного множителя) примет вид:

$$\begin{aligned} s &= \lambda \ln \frac{3}{1} + \lambda^2 \ln \frac{5}{3} + \dots = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \ln \frac{2k+1}{2k-1} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \left( \frac{1}{2k} + \frac{1}{3(2k)^3} + \dots \right). \end{aligned}$$

Абсолютная сходимость ряда в диапазоне  $|\lambda| < 1$  следует из признака Лейбница. Для оценки числа членов ряда  $n$ , необходимых для достижения задан-

ной точности вычислений, упростим ряд, пренебрегая малыми величинами:

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k / k = -\ln(1-\lambda). \quad (8)$$

Тогда зависимость погрешности  $\delta$  от числа членов ряда  $n$  определяется рекуррентным соотношением:

$$\delta_0 = 1; \quad \delta_n = \delta_{n-1} + \frac{\lambda^n}{n \ln(1-\lambda)}, \quad n=1,2,\dots \quad (9)$$

Задавая максимальную погрешность, находим число членов ряда из условия  $|\delta_n| < \delta_{\max}$ . Оценка (9) согласуется с (7), где  $F_0 = \ln(2h/R)$ ;  $F_1 = \ln(3)$ ;  $h=1$ ;  $R=0,01$  (рис. 5).

Для знакопередающихся рядов ( $\lambda < 0$ ) сходимость к пределу двухсторонняя, поэтому точность расчета можно повысить усредняя суммы, полученные при числе членов ряда  $n$  и  $n+1$ . Например, вместо (8) следует записать:

$$s = \sum_{k=1}^n \lambda^k / k + \lambda^{n+1} / 2(n+1), \quad \lambda < 0.$$

Аналогично корректируется оценка (9). Рассмотренная процедура уточнения становится заметной при  $\lambda < -0,6$  (рис. 5). Полученная оценка может быть полезна для предварительного анализа. Например, при удельном сопротивлении  $\rho_1 / \rho_2 = 5$ ,  $\lambda = -2/3$  можно ограничиться значением  $n=4$ , в то время как обратная ситуация  $\rho_1 / \rho_2 = 5$ ,  $\lambda = -2/3$  потребует вдвое больше вычислений (рис. 5).

Таким образом, возможны два способа ограничения рядов (6) – динамически в ходе выполнения программы на базе оценки (7) или другими, чисто

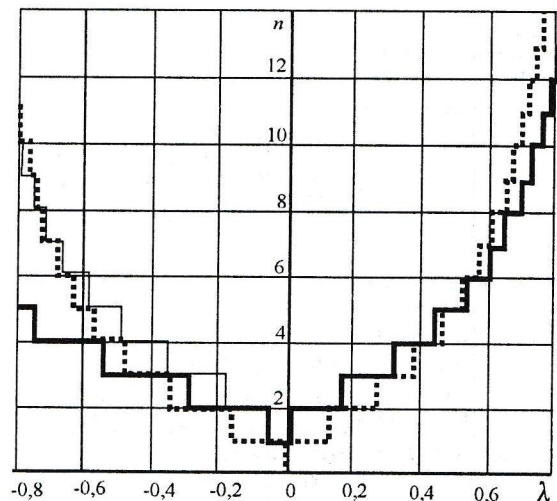


Рис. 5. Оценка числа членов ряда  $n$  при расчете потенциальных коэффициентов с погрешностью 1%: 1 – по формуле (9); 2 – тоже с уточнением при  $\lambda < 0$ ; 3 – по формуле (7)

программными средствами выхода из бесконечного цикла при достижении заданной точности, а также статически, например на основе априорной оценки (9). Второй способ позволяет выполнить трудоемкие расчеты потенциальных коэффициентов встроеными функциями без программирования циклов, что может оказаться определяющим при использовании системы Mathcad. Этот способ удобен и для контроля точности — достаточно сопоставить результаты расчетов с  $n$ -м и  $(n+1)$ -м членом ряда. При  $\lambda < 0$  сходимость к решению двухсторонняя, поэтому полученные результаты можно усреднить. Например, при расчете сопротивления заземлителя [1] в двухслойной земле с  $\rho_1 / \rho_2 = 200 / 35$  ( $\lambda = -0,7$ ) вариацией числа членов ряда получена числовая последовательность (306, 283, 298, 288, 295, 291, 293)  $10^{-3}$ , где первое значение получено при  $n=4$  на основе (9). Усреднением со вторым членом последовательности получаем сопротивление 0,295, что согласуется с точным значением 0,292 (в оригинале 0,294).

Разработанная техника вычисления потенциальных коэффициентов продемонстрирована в Mathcad (13) — программе расчета статических режимов работы заземлителей в однородной и двухслойной земле (Приложение 1). При решении тестовой задачи [1] (Приложение 2) расхождение с оригиналом в среднем не превышает 1%. Время счета этой задачи на компьютере с процессором 2,8 МГц при дроблении на 120 стержней составляет 0,5 с для однородной среды, 4–6 с для среды с  $\lambda = \mp 2 / 3$  и возрастает пропорционально квадрату числа стержней.

**Приложение 1. Фрагмент программы расчета заземлителей.**

```

ORIGIN := 1
Оценка числа членов ряда
Limit(λ, δ) := return 0 if λ = 0
for n ∈ 1..25
    break if  $\left| 1 + \frac{\sum_{k=1}^n \frac{\lambda^k}{k} + \text{if} \left[ \lambda < 0, \frac{\lambda^{n+1}}{2 \cdot (n+1)}, 0 \right]}{\ln(1-\lambda)} \right| < \delta$ 
n
Потенциальные коэффициенты
α(p, q, dl) := r1 ← q - p
r2 ← r1 + dl
(R1 R2 L) ← (|r1| |r2| |dl|)
if (R2 ≥ R1, ln((R2-L+r2-dl)/(R1-L+r1-dl)), ln((R1-L-r1-dl)/(R2-L-r2-dl)))
α0(p, q, L, LR) := if(LR > 0, 2ln(LR), α(p, q, L))
α'(p, q, L) := α(p, q, L) + α  $\begin{bmatrix} q_1 & L_1 \\ q_2 & L_2 \\ -q_3 & -L_3 \end{bmatrix}$ 

```

```

α11(p, q, L, LR, q', L', h2, λ) := α0(p, q, L, LR) + α(p, q', L) ...
+ ∑_{k=1}^{last(λ)} [λ_k · (α'(p, q + k·h2, L) + α'(p, q' + k·h2, L'))]
αij(p, q, L, LR, ρ1, ρ2, h2, λ) := (q' L') ←  $\begin{bmatrix} q_1 & L_1 \\ q_2 & L_2 \\ -q_3 & -L_3 \end{bmatrix}$ 
ρ1 · (α0(p, q, L, LR) + α(p, q', L')) if ρ1 = ρ2
ρ1 · α11(p, q, L, LR, q', L', h2, λ)

```

```

Линейная плотность заряда и потенциал заземлителя
TauFi(Q, L, R, I, ρ1, ρ2, h, λ) := t0 ← time(0)
h2 ← stack(0, 0, 2·h)
for i ∈ 1..last(Q)
    p ← Qi + 0,5·Li
    for j ∈ 1..last(Q)
        LR ← if(i = j, |Li| + Ri, 0)
        αij ← αij(p, Qj, Lj, LR, ρ1, ρ2, h2, λ)
    τ ← solve(α, α(1) · 0 + 4·π)
    φ ← I + (τ · |L|)
    (τ · φ time(1) - t0)
Потенциал в точке на поверхности земли

```

```

φground(x, y, q, L, ρ1, ρ2, h, λ, τ) := (h2 p) ← (stack(0, 0, 2·h) stack(x, y, 0))
1 / (4·π) ∑_{j=1}^{last(Q)} (αij(p, Qj, Lj, 0, ρ1, ρ2, h2, λ) · τj)

```

```

Прямоугольная сетка
Grid(t, R, Lx, nx, Ly, ny) := S ← (0 0 0)
for i ∈ 0..nx
    for j ∈ 0..ny-1
        S ← stack  $\begin{bmatrix} S, \begin{bmatrix} i \cdot \frac{Lx}{nx} & j \cdot \frac{Ly}{ny} \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \cdot \frac{Lx}{nx} & (j+1) \cdot \frac{Ly}{ny} \\ t \end{bmatrix}, R \end{bmatrix}$ 
for j ∈ 0..ny
    for i ∈ 0..nx-1
        S ← stack  $\begin{bmatrix} S, \begin{bmatrix} i \cdot \frac{Lx}{nx} & j \cdot \frac{Ly}{ny} \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (i+1) \cdot \frac{Lx}{nx} & j \cdot \frac{Ly}{ny} \\ t \end{bmatrix}, R \end{bmatrix}$ 
submatrix(S, 2, rows(S), 1, cols(S))

```

```

Дискретизация стержней
Disc(S, L1) := k ← 1
for i ∈ 1..rows(S)
    (A L R) ← (Si,1 Si,2 - Si,1 Si,3)
    m ← ceil(|L| + L1)
    DL ← L + m
    for j ∈ 1..m
        (qk dk rk k) ← [A + DL · (j-1) DL R k+1]
    (q dl r)

```

**Приложение 2. Пример расчета заземлителя**

Задача: рассчитать прямоугольный заземлитель со сторонами  $L_x, L_y$ , число ячеек равномерной сетки —  $n_x, n_y$ , радиус стержней  $R$ , глубина погружения  $t$  в двухслойной земле, мощность верхнего слоя  $h$ , при токе  $I$  [1, стр. 143]. Размер элементарного стержня —  $L1$ .



$(Lx Ly px ny R t) := (10 10 4 4 0.01 0.5)$   
 $(\rho1 \rho2 h I L1 \delta) := (20 100 2 100 1 1\%)$   
 Координаты  $(x y)^T$  расчетных точек на поверхности земли  
 $p0 := \begin{pmatrix} 5 & 7.5 & 10 & 5 & 6.25 & 8.75 & 10 & 9.375 & 10 \\ 2.5 & 2.5 & 2.5 & 1.25 & 1.25 & 1.25 & 1.25 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Решение**

$$n := \text{Limit} \left( \frac{\rho2 - \rho1}{\rho1 + \rho2}, \delta \right) \quad n = 8$$

$$\lambda := \begin{cases} \lambda_0 \leftarrow \frac{\rho2 - \rho1}{\rho1 + \rho2} \\ \text{for } k \in 1.. \max(1, n) \\ \lambda_k \leftarrow \lambda_0^k \\ \text{if } (\lambda_0 < 0, \text{stack}(\lambda, 0.5 \cdot \lambda_0^{n+1}), \lambda) \end{cases}$$

$$\lambda^T = (0.667 \ 0.444 \ 0.296 \ 0.198 \ 0.132 \ 0.088 \ 0.059 \ 0.039)$$

Стержни прямоугольной сетки

$$S := \text{Grid}(t, R, Lx, px, Ly, ny)$$

Дискретизация стержней

$$(Q \ L \ R) := \text{Disc}(S, L1)$$

Расчет плотности заряда стержней и потенциала заземлителя

$$(\tau \ \varphi \ \text{seconds}) := \text{TauFi}(Q, L, R, I, \rho1, \rho2, h, \lambda)$$

Потенциал, сопротивление, время счета, число стержней

$$(\varphi \ \varphi + I \ \text{seconds} \ \text{last}(\tau)) = (202.383 \ 2.024 \ 5.625 \ 120)$$

Потенциал в расчетных точках на поверхности земли

$$\varphi0 := \begin{cases} \text{for } i \in 1.. \text{cols}(p0) \\ \varphi0_i \leftarrow \varphi_{\text{ground}}(\rho0_{1,i}, \rho0_{2,i}, Q, L, \rho1, \rho2, h, \lambda, \tau) \\ (\varphi0 + \varphi)^T \end{cases}$$

Потенциал в тех же точках [1, стр.144]

$$\varphiB := (0.981 \ 0.976 \ 0.93 \ 0.962 \ 0.947 \ 0.922 \ 0.904 \ 0.893 \ 0.865)$$

Сопоставление значений потенциалов

$$T := \text{stack} \left( \varphi0, \varphiB, \frac{\varphi0 - \varphiB}{\varphiB} \cdot 100 \right)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T =	0.983	0.979	0.932	0.965	0.951	0.926	0.909	0.896	0.863
2	0.981	0.976	0.93	0.962	0.947	0.922	0.904	0.893	0.865
3	0.228	0.297	0.216	0.304	0.39	0.482	0.529	0.311	-0.208

Средняя погрешность

$$\text{mean} \left( \frac{|\varphi0 - \varphiB|}{\varphiB} \right) = 0.329\%$$

**Вывод.** Полученные предельно компактные векторные выражения для потенциала и напряженности стержневого заземлителя в однородной и двухслойной земле адаптированы к требованиям современных систем компьютерной математики. Результаты работы реализованы в системе Mathcad позволяют пользоваться данной методикой студентам, инженерам и другим исследователям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бургсдорф В.В., Якобс А.И. Заземляющие устройства электроустановок. – М.: Энергоатомиздат, 1987.
2. Дьяков А.Ф., Максимов Б.К., Борисов Р.К. и др. Электромагнитная совместимость в электроэнергетике и электротехнике / Под ред. А.Ф. Дьякова. – М.: Энергоатомиздат, 2003.
3. Иосель Ю.Я., Качанов Э.С., Струнский М.Г. Расчет электрической емкости. – Л.: Энергоиздат, 1981.
4. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей. – Л.: Энергоиздат, 1986.

[22.02.07]

*Автор: Шишигин Сергей Леонидович в 1982 г. окончил электроэнергетический факультет Вологодского политехнического института. В 1988 г. в Ленинградском политехническом институте защитил кандидатскую диссертацию «Оптимизация формы электродов с осевой симметрией по условию ограничения максимальной напряженности». Доцент кафедры электротехники Вологодского государственного технического университета.*