

# Математические модели и методы расчета заземляющих устройств

ШИШИГИН С.Л.

*Анализируются математические модели заземляющих устройств на основе теории цепей с сосредоточенными параметрами. Показана методика построения схемы замещения заземляющего устройства с учетом взаимных электрических и магнитных связей между элементами. Рассмотрены методы расчета переходных процессов в заземляющих устройствах.*

**Ключевые слова:** заземляющие устройства, теория электрических цепей, сосредоточенные параметры, математические модели

При расчете заземляющего устройства (ЗУ) с заданным воздействием тока молнии или КЗ ставится цель – найти потенциалы, продольные и стекающие токи элементов ЗУ, его сопротивление, напряжение прикосновения, шаговые напряжения, а также распределение напряженности электрического и магнитного полей [1–3].

Для решения данной задачи применяются теории антенн, длинных линий и цепей с сосредоточенными параметрами. Теория антенн излишне трудоемка и избыточна по точности на фоне погрешностей исходных данных ЗУ и структуры земли. Применение теории длинных линий с параметрами, рассчитанными исходя из статического приближения, требует дискретизации ЗУ на элементы малой длины и поэтому не дает преимуществ по сравнению с теорией цепей. При расчете параметров линий на основе уравнений электромагнитного поля решение становится трудоемким.

Наиболее простым и адекватным расчетным инструментом современных ЗУ, систем молниезащиты и уравнивания потенциала, представляющих трехмерную сетчатую конструкцию из коротких проводников, является теория цепей с сосредоточенными параметрами.

При численных расчетах ЗУ разбивается на элементы, размеры которых существенно меньше длины электромагнитной волны. Элементы моделируются симметричными П-четыреполюсниками с продольными активно-индуктивными сопротивлениями и поперечными активно-емкостными проводимостями. Элементы объединены гальваническими, емкостными и индуктивными связями, а соответствующие им матрицы **GCM** являются полностью заполненными. С учетом специфики методов расчета электрических полей **GC**-параметры элементов определяются в средних, а не узловых

*Mathematical models of grounding devices constructed on the basis of the theory of circuits with lumped parameters are analyzed. A procedure for constructing the equivalent circuit of a grounding device taking into account mutual electric and magnetic couplings between elements is shown. Methods for calculating transients in grounding devices are considered.*

**Key words:** grounding devices, theory of electrical circuits, lumped parameters, mathematical models

точках, как требуется для П-четыреполюсников. Возникает задача эквивалентного переноса **GC**-параметров из средних точек в узлы элементов. Заметим, что простейшая методика ее решения путем деления параметров пополам неприменима для цепей с электромагнитосвязанными элементами.

В основу первой модели ЗУ [1] положена итерационная процедура приведения матриц собственных и взаимных параметров четырехполюсников к диагональному виду, что соответствует цепной схеме с эквивалентными собственными (далее рабочими) параметрами звеньев. В первом приближении ЗУ принимается эквипотенциальным,  $\varphi = \text{const}$ , и решением системы  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{J} = \varphi$ , где  $\mathbf{R}$  – матрица собственных и взаимных сопротивлений элементов, находятся стекающие токи  $\mathbf{J}$  и рабочие проводимости элементов  $g_i = J_i / \varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , которые делятся пополам и включаются в узлы четырехполюсника. Аналогично определяются рабочие индуктивности и емкости. Таким образом, благодаря устранению взаимных связей между элементами параметры схемы замещения ЗУ найдены простейшим способом. Далее рассчитываются потенциалы узлов и токи ветвей, при несовпадении которых с начальными значениями цикл повторяется.

Аналитическое исследование подобных итерационных алгоритмов на модельных задачах показало, что их сходимость зависит от частоты, размеров ЗУ и удельного сопротивления земли. Применительно к уединенному стержню длиной  $l$  в однородной земле с удельным сопротивлением  $\rho$  метод простой итерации приводит к сходящейся итерационной последовательности из любого начального приближения со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $q$  при условии  $q = \omega \mu_0 l^2 / 2\rho < 1$ . Поэтому на низких частотах схо-

димность итерационного процесса высокая, но с увеличением частоты (или уменьшением длительности фронта волны) сходимость замедляется и может отсутствовать в удаленных от источника точках.

Таким образом, рассмотренную модель ЗУ в виде цепной схемы с рабочими параметрами, полученными итерационным путем, целесообразно использовать для расчета ЗУ в режимах КЗ, но не в задачах молниезащиты.

Математической моделью ЗУ в [3] является цепная схема с электромагнитосвязанными четырехполюсниками, которые описываются законом Ома и первым законом Кирхгофа относительно потенциалов узлов и токов ветвей. Поперечные проводимости элементов, рассчитанные в средних точках, удается включить в эти уравнения на основе предположения о равномерном растекании поперечного тока элемента через два узла П-четырёхполюсника. К сожалению, данная методика не позволяет выразить матрицу поперечных проводимостей узлов в явном виде, что исключает применение других, более эффективных, чем законы Ома и Кирхгофа методов расчета цепей. Отсюда избыточность входных параметров, описывающих топологию цепи, и удвоенная размерность системы уравнений по сравнению с методом узловых потенциалов.

В математической модели ЗУ [4] плотность стекающего тока в пределах каждого элемента принимается линейной функцией и определяется плотностью тока в узлах, что позволяет избежать характерную для других моделей процедуру переноса поперечных параметров из средних в узловые точки элементов. Однако вместо одной проблемы возникают две новые. Расчет взаимных сопротивлений узлов проводится численным интегрированием, в то время как при стандартной методике с кусочно-постоянной аппроксимацией плотности тока — аналитически [5]. Плотность тока в узлах, где сопряжение проводников ЗУ не является гладким, имеет особенности и требуется их выделение [6], иначе линейная аппроксимация не является обоснованной. Эта задача решается введением дополнительных узлов и фокусировкой сетки, что увеличивает трудоемкость. В итоге, рассматриваемая модель ЗУ представляет несомненный интерес для исследователей, но является избыточной при решении инженерных задач.

Особенностью математической модели ЗУ [7] является использование Т-четырёхполюсников, что предполагает разделение продольных сопротивлений элементов, найденных в средних точках, на две части. Эта задача, более сложная по сравнению с преобразованиями П-схем, в [7] решена без учета

взаимной индуктивности стержней. Другим недостатком Т-четырёхполюсников является наличие лишнего (среднего) узла, что далеко не всегда компенсируется объединением крайних узлов соседних четырехполюсников. Применение Т-четырёхполюсников в схеме замещения типичного ЗУ с большим числом пересечений стержней приводит к существенному увеличению числа узлов и поэтому нецелесообразно.

В настоящей статье предлагается математическая модель ЗУ в виде многозвенной схемы с симметричными электромагнитосвязанными П-четырёхполюсниками (МЭМС модель ЗУ). Определены параметры модели, рассмотрены методы расчета установившихся и переходных процессов в ЗУ с учетом частотно-зависимых элементов.

**Многозвенная электромагнитосвязанная (МЭМС) модель ЗУ.** Примем допущения. Задача линейная: параметры земли ( $\mu_0, \epsilon$ ) и материала ЗУ ( $\mu, \gamma$ ) постоянные. Земля двухслойная горизонтально-слоистая с постоянными удельными сопротивлениями слоев  $\rho_1, \rho_2$ . Заземляющее устройство состоит из элементов круглого сечения, длина которых существенно больше радиуса,  $l > 10a$ . Источники поля (стекающие и продольные токи, заряды) сосредоточены на осях элементов. Линейная плотность источников в пределах элемента постоянная.

Длина элемента в результате дискретизации ЗУ удовлетворяет условию  $10a \leq l \leq \lambda/10 = \sqrt{10^5 \rho / f}$ , где  $\lambda$  — длина электромагнитной волны частотой  $f$  в проводящей среде с удельным сопротивлением  $\rho$ . Например, при частоте тока молнии  $f = 1$  МГц (импульс 0,25/100 мкс) и характерном значении  $\rho = 100$  Ом·м длина элемента в земле  $l = 3$  м.

Найдем параметры МЭМС модели ЗУ (рис. 1). Активное сопротивление и внутреннюю индуктивность элементов (с учетом поверхностного эффекта) опишем диагональными матрицами  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{L}$  [8, т.3]:

$$R_{ii} = \operatorname{Re}(Z_{ii}), \quad L_{ii} = \operatorname{Im}(Z_{ii} / \omega), \quad Z_{ii} = \frac{lq}{2\pi a \gamma} \frac{J_0(qa)}{J_1(qa)},$$

$$q = \sqrt{-j\omega\mu\gamma},$$

где  $l, a$  — длина и радиус  $i$ -го элемента.

Электрические и магнитные связи между элементами описываются квадратными, полностью заполненными матрицами собственных и взаимных проводимостей  $\mathbf{G}$ , емкостей  $\mathbf{C}$ , индуктивностей  $\mathbf{M}$ . Матрица проводимостей получается обращением матрицы сопротивлений  $\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1}$ , матрица емкостей получается обращением матрицы потенциальных коэффициентов  $\mathbf{C} = \alpha^{-1}$ .

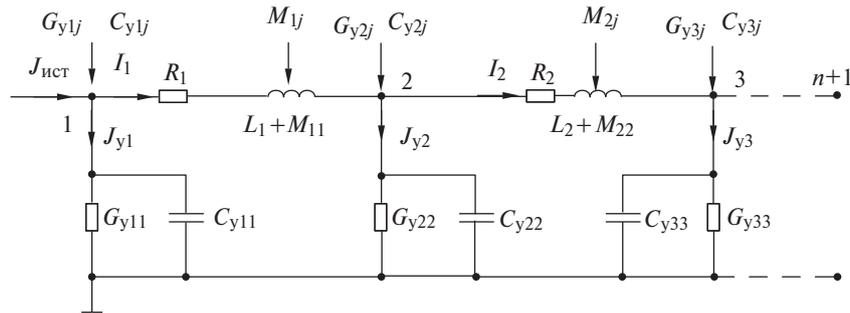


Рис. 1. Многоэлементная электромагнитосвязанная модель стержневого заземлителя

Взаимное сопротивление  $R_{ij}$  между  $j$ -м элементом  $qm$  (источником поля) и средней точкой  $i$ -го элемента  $p$  в однородной среде с удельным сопротивлением  $\rho$  (рис. 2) равно [5]:

$$R_{ij} = R(p, q, l) = \frac{\rho}{4\pi|l|} \ln \frac{(q+l-p)l + |q+l-p||l|}{(q-p)l + |q-p||l|},$$

где  $q = (x_q, y_q, z_q)^T$ ;  $m = (x_m, y_m, z_m)^T$ ;  $l = l_j = m - q = (x_l, y_l, z_l)^T$ ;  $p = (x_p, y_p, z_p)^T$  – геометрические параметры элементов.

Собственное сопротивление элемента

$$R_{ii} = \frac{\rho}{2\pi|l|} \ln \frac{|l|}{a},$$

где  $a$  – радиус элемента.

Влияние границы раздела «земля–воздух» учитывается зеркальным отображением элемента относительно поверхности земли:

$$R'_{ij} = R'(p, q, l) = R(p, q, l) + R(p, q', l'),$$

где  $q' = (x_q, y_q, -z_q)^T$ ;  $l' = (x_l, y_l, -z_l)^T$  – координаты отображения.

Взаимное сопротивление в двухслойной земле определяется бесконечным числом отражений источника от границ раздела слоев земли и границы с воздухом и выражается через функции сопротивления для однородной земли [5]:

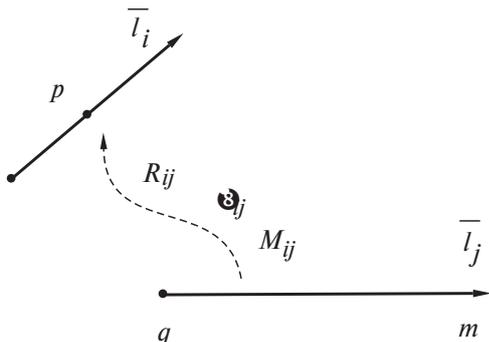


Рис. 2. К определению взаимных параметров двух стержней

$$R_{ij} = \begin{cases} R'(p, q, l) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n [R'(p, q + 2nh, l) + R'(p, q' + 2nh, l')], & p_3 < h_3, q_3 < h_3; \\ (1-k) \sum_{n=0}^{\infty} k^n [R(p, q - 2nh, l) + R(p, q' - 2nh, l')], & p_3 > h_3, q_3 < h_3; \\ R(p, q, l) - kR(p, q' + 2h, l') + (1-k^2) \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} k^n R(p, q', -2nh, l'), & p_3 < h_3, q_3 < h_3; \\ (1+k) \sum_{n=0}^{\infty} k^n R'(p, q + 2nh, l), & p_3 < h_3, q_3 > h_3, \end{cases}$$

где  $h = (0, 0, h_3)^T$ ;  $h_3$  – мощность верхнего слоя земли;  $k = (\rho_2 - \rho_1) / (\rho_1 + \rho_2)$  – коэффициент отражения; стержни не пересекают границу раздела сред, что достигается на этапе дискретизации ЗУ; сходимость бесконечных рядов при  $|k| < 1$  доказывается по признаку Лейбница.

Знакопередающиеся ряды ( $\rho_1 > \rho_2$ ) обладают высокой сходимостью, сходимость знакопостоянных рядов ( $\rho_1 < \rho_2$ ) существенно ниже, особенно при значении коэффициента  $k > 0,9$ , характерном для грунта с изолирующим (скальным) основанием. Трудоемкость расчета ЗУ в подобном грунте, для которого требуется суммирование десятков членов ряда, недопустимо высока.

К существенному ускорению сходимости приводит метод выделения [9], когда из медленно сходящегося ряда выделяется ряд с известной суммой типа

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} k^n / n = -\ln(1-k), \quad |k| < 1,$$

обладающий аналогичными асимптотическими свойствами, и остается быстроходящимся рядом.

Таким образом, элементы матрицы сопротивлений  $\mathbf{R}$  найдены. Элементы матриц потенциальных коэффициентов и взаимных индуктивностей найдем с учетом известной аналогии между статическими полями:

$$\alpha_{ij} = R'_{ij} / \rho \epsilon, \quad M_{ij} = \mu_0 (\bar{l}_i \bar{l}_j) R_{ij} / \rho,$$

где  $R_{ij}$ ,  $R'_{ij}$  – взаимные сопротивления элементов в безграничной среде и однородной земле – определены ранее. Напомним, что  $\mathbf{G}=\mathbf{R}^{-1}$ ,  $\mathbf{C}=\alpha^{-1}$ .

В результате расчета электрического поля  $\mathbf{GC}$ -параметры элементов определены в средних точках элементов и должны быть перенесены в узлы П-четырёхполюсников в МЭМС модели ЗУ (рис. 1). Для этого выполним эквивалентное преобразование матриц  $\mathbf{GC}$  в узловые матрицы  $\mathbf{G}_y\mathbf{C}_y$  из условия неизменности стекающего тока элементов.

Примем допущение, что поперечный ток каждого узла П-четырёхполюсника равен половине стекающего тока элемента, а потенциал элемента равен среднему потенциалу узлов моделирующего его четырёхполюсника. Опишем топологию продольных ветвей схемы (рис. 1) матрицей соединений  $\mathbf{A}$  и введем матрицу  $\mathbf{B}$  ( $b_{i,j} = |a_{i,j}|/2$ ), которая позволяет связать стекающие токи элементов  $\mathbf{J}$  с поперечными токами  $\mathbf{J}_y$  узлов четырёхполюсников  $\mathbf{J}_y = \mathbf{B} \cdot \mathbf{J}$ , а также потенциалы средних точек элементов  $\varphi$  с потенциалами  $\mathbf{U}$  узлов четырёхполюсников  $\varphi = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{U}$ . Например, для двухзвенной схемы (рис. 1)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}_y = \mathbf{B} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} J_1 \\ J_1 + J_2 \\ J_2 \end{bmatrix};$$

$$\varphi = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{U} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} U_1 + U_2 \\ U_2 + U_3 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, стекающие токи и потенциалы элементов перенесены в узлы схемы замещения.

Рассчитаем схему (рис.1) при воздействии источников синусоидального тока методом узловых потенциалов [8, т.1]. Первый закон Кирхгофа для потенциальных узлов схемы в матричной форме имеет вид:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{J}_{\text{ист}} - \mathbf{J}_y, \quad \text{или} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{ист}}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{J}_y$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{J}_{\text{ист}}$  – векторы продольного, поперечного, стекающего и задающего тока источника соответственно.

Вектор стекающего тока

$$\mathbf{J} = \mathbf{Y} \cdot \varphi = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{U}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{Y} = \mathbf{G} + j\omega\mathbf{C}$  – матрица поперечных проводимостей элементов;  $\varphi$ ,  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{C}$  – параметры элементов в средних точках;  $\mathbf{U}$  – искомый вектор потенциалов узлов.

Ток ветвей находим по закону Ома:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{U}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{Z} = \mathbf{R} + j\omega(\mathbf{L} + \mathbf{M})$  – матрица продольных сопротивлений ветвей.

Подставив (2), (3) в (1), получим запись узловых уравнений в матричной форме:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{B}^T) \cdot \mathbf{U} = \mathbf{J}_y \cdot \mathbf{U} = \mathbf{J}_{\text{ист}}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{Y}_y$  – матрица узловых проводимостей.

Решением (4) находим потенциалы узлов и далее стекающие (2) и продольные токи (3).

Второе слагаемое в (4) является матрицей узловых проводимостей поперечных ветвей схемы (рис. 1), что позволяет записать формулы приведения матриц проводимости и емкости, найденных в средних точках элементов ЗУ, к узловым матрицам:

$$\mathbf{G}_y = \mathbf{B} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{B}^T; \quad \mathbf{C}_y = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^T. \quad (5)$$

Таким образом, выполнен эквивалентный перенос матриц проводимостей и емкостей, найденных методами теории поля в средних точках элементов, в узлы схемы замещения. В результате рассматриваемая модель ЗУ инвариантна к методу расчета электрической цепи. Узловые матрицы (5) характеризуются диагональным преобладанием, что обеспечивает хорошую обусловленность системы (4) и возможность применения как прямых, так и итерационных методов ее решения.

При реализации МЭМС модели ЗУ следует учесть сильную разреженность матрицы соединений  $\mathbf{A}$ . При среднем числе элементов, подключенных к узлу сетки,  $n=4$  доля ненулевых элементов при типичном для ЗУ общем числе элементов  $p=1000$  составляет  $n/p=0,4\%$ . С учетом этой особенности топология цепи и ее параметры задаются топологическим списком – матрицей  $\mathbf{S}$ , каждая строка которой описывает один элемент. В первом столбце записаны номера узлов, из которых ветви выходят, во втором столбце – номера узлов, в которые ветви входят. Третий столбец содержит номер слоя, на которые подразделяется геометрия ЗУ. Операции с разреженными матрицами в (2)–(5) заменяются последовательными действиями со строками матрицы  $\mathbf{S}$  (обработкой топологического списка), что повышает эффективность расчетов ЗУ большой размерности.

Подведем итоги. Для формирования МЭМС модели ЗУ (рис. 1) необходимо:

1. Задать топологический список (матрицу  $\mathbf{S}$ ), определяемый автоматически по геометрии ЗУ, и вектор источников тока  $\mathbf{J}_{\text{ист}}$ .

2. Методами теории поля рассчитать собственные и взаимные параметры элементов ЗУ – матрицы  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{M}$ .

3. Определить матрицы узловых проводимостей  $\mathbf{G}_y$  и емкостей схемы  $\mathbf{C}_y$  по формулам (5).

Расчет МЭМС модели ЗУ в установившемся режиме проводится методом узловых потенциалов, но может быть использован и другой метод.

Многосвязная электромагнитосвязанная модель ЗУ позволяет устранить основные проблемы существующих методов расчета ЗУ [10], а именно, обеспечить корректное вычисление собственных и взаимных индуктивностей (емкостей и проводимостей) элементов ЗУ методами теории поля, а на их основе и волновых параметров.

Данная модель ЗУ позволяет моделировать волновые процессы в ВЛ и протяженных заземлителях с учетом задержки и затухания электромагнитной волны. Построенная на учете всех механизмов связи между элементами МЭМС модель ЗУ позволяет решать задачи ЭМС в широком диапазоне частот для произвольной конфигурации ЗУ, в частности при наличии сторонних заземленных коммуникаций.

Среди сформулированных в [10] требований нерешенной задачей остается моделирование произвольной структуры земли, однако ее решение, а также уточнение характеристик элементов ЗУ повысит точность параметров, но не отразится на структуре МЭМС модели ЗУ. Наличие нелинейных характеристик (искрообразование в земле, коронирование проводов, насыщение стали) не является ограничением для МЭМС модели ЗУ при использовании итераций аналогично [4]. Предложенная МЭМС модель ЗУ может быть дополнена сосредоточенными элементами — их проводимости подключаются к узлам схемы (рис. 1).

**Переходные процессы в ЗУ.** Переходный процесс (ПП) при растекании импульсного тока с широким спектром частот возникает в ЗУ вследствие удара молнии или коммутации высоковольтного оборудования. Для расчета ПП обычно применяются метод дискретных схем (МДС) [2], частотный метод (ЧМ) — при наличии электромагнитных экранов [3], а также операторный метод ОМ [11].

Применение ЧМ является естественным для учета частотно-зависимых элементов, однако его трудоемкость при аperiodических воздействиях существенно выше, чем у МДС. Наиболее эффективными методами расчета ПП в ЗУ являются МДС и ОМ, реализация которых с учетом частотно-зависимых параметров рассмотрена далее.

**Метод дискретных схем.** Применим неявную формулу Эйлера для интегрирования дифференциального уравнения катушки с индуктивностью  $L$  (или взаимной индуктивностью  $M$ ) и конденсатора  $C$  на  $n$ -м временном шаге длиной  $h$  [8, т.2]:

$$L \frac{di}{dt} = u, \quad \frac{L}{h}(i_{n+1} - i_n) = u_{n+1}, \quad u_{n+1} = \frac{L}{h}i_{n+1} - \frac{L}{h}i_n,$$

$$C \frac{du}{dt} = i, \quad i_{n+1} = \frac{C}{h}u_{n+1} - \frac{C}{h}u_n.$$

Этим уравнениям соответствуют схемы замещения рис. 3, где  $R=L/h, G=C/h, E_n=Ri_n, J_n=Gu_n, h=\text{const}$  — длина шага. Заменяв катушки и конденсаторы в МЭМС модели ЗУ (рис. 1) дискретными схемами (рис. 3), сведем расчет ПП в ЗУ к пошаговому расчету резистивной схемы с дополнительными источниками ЭДС и тока, учитывающими начальные условия каждого шага.

**Операторный метод.** Воспользуемся нестандартной формой теоремы о вычетах [12]:

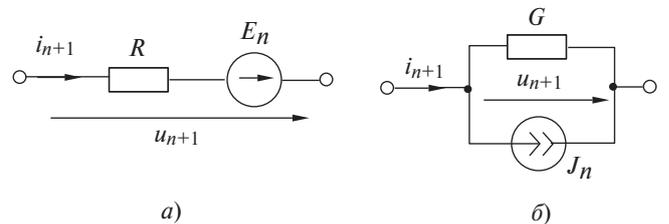


Рис. 3. Дискретные схемы замещения катушки (а) и конденсатора (б)

$$f(t) = \sum_i \text{Res} F(z_i / t) e^{z_i t}, \quad z = st,$$

где вместо полюсов операторной функции  $F(s)$  используются полюса экспоненты.

При аппроксимации экспоненты дробно-рациональной функцией третьего порядка ( $n=1, m=2$ ) —

$$e^{z t} \approx \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{1 + b_1 z + \dots + b_m z^m} = \frac{1 + z/3}{1 - 2z/3 + z^2/6}$$

имеем два комплексно-сопряженных полюса  $z = 2 \pm \sqrt{2}j$ , что позволяет записать теорему о вычетах в виде [12]:

$$f(t) = \text{Re}((-2 + 5\sqrt{2}j)F(s))/t, \quad s = (2 + \sqrt{2}j)/t, \quad t > 0. \quad (6)$$

Здесь недопустимы скачкообразные функции, но для источников тока в ЗУ это требование выполняется. Для расчета оригинала требуется одно вычисление операторной функции. Таким образом, получена формула третьего порядка, что на порядок превосходит формулу трапеций и на два порядка формулу Эйлера.

Реализация шагового алгоритма расчета ПП на основе (6) заключается в следующем. Заменяем катушки и конденсаторы на схеме замещения (рис. 1) их дискретными моделями — рис. 3, где  $R=sL, G=sC, E_n=Li_n, J_n=Cu_n, s=(2 + \sqrt{2}j)/h, h=\text{const}$  — длина шага; начальные условия первого шага нуле-

вые. Операторное изображение источника тока получаем прямым преобразованием Лапласа. Проводим пошаговый расчет комплексной схемы по формулам (2)–(4). Решение во временной области получаем по (6). Шаговый алгоритм устойчив при интегрировании тестового дифференциального уравнения  $x' = \lambda x$  при  $\lambda < 0$ , а также в большей части правой полуплоскости при  $\lambda > 0$ .

Рассмотренный алгоритм является более точным, но и более трудоемким по сравнению с МДС, поскольку приводит к комплексной схеме замещения ЗУ вместо резистивной схемы в МДС.

Учет частотно-зависимых параметров в МДС и ОМ. Типичным частотно-зависимым элементом ЗУ является стальной проводник с учетом поверхностного эффекта. От частоты зависят электромагнитные экраны в задачах ЭМС, сопротивление земли в задачах грозозащиты ВЛ.

При инженерных расчетах ЗУ частотной зависимостью внутреннего сопротивления стержней обычно пренебрегают, проводя расчеты по схеме рис. 4,а на эквивалентной частоте импульса  $f = 0,25 / T_1$ , где  $T_1$  – длительность фронта волны. Однако погрешность подобного подхода не анализировалась. Для учета частотных зависимостей элементов могут быть построены эквивалентные схемы с заданными характеристиками, но в шаговых алгоритмах МДС и ОМ использование этой методики связано с существенным увеличением числа ветвей, что нецелесообразно. В [13] показана возможность моделирования частотных свойств элементов последовательной схемой с постоянным сопротивлением и переменной ЭДС, определяющей начальные условия каждого шага. Эта идея реализуется и в настоящей статье, но более просто.

Пусть задано сопротивление частотно-зависимого элемента  $Z(j\omega)$  или его операторный аналог  $Z(s)$ . Для перехода во временную область проинтегрируем  $Z(s)$  в пространстве изображений и, перейдя к оригиналу, получим переходное сопротивление  $z(t) = L^{-1}[Z(s)/s]$ , связывающее между собой напряжение и ток в интеграле Дюамеля:

$$u(t) = z(t)i(0) + \int_0^t z(t-x)i'(x)dx.$$

Воспользуемся дискретной формой записи этого интеграла на временной сетке с узлами  $t_n = (n-1)h$ ,  $n=1, \dots, N+1$ , где  $N$  – число интервалов длиной  $h$ . Примем, что производная тока в пределах каждого интервала  $i'_n = \text{const}$ . Тогда

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{m=1}^n \frac{i_{m+1} - i_m}{h} \int_{t_m}^{t_{m+1}} z(t_{n+1} - x)dx = \\ &= \sum_{m=1}^n (i_{m+1} - i_m) R_{n-m+1}, \end{aligned}$$

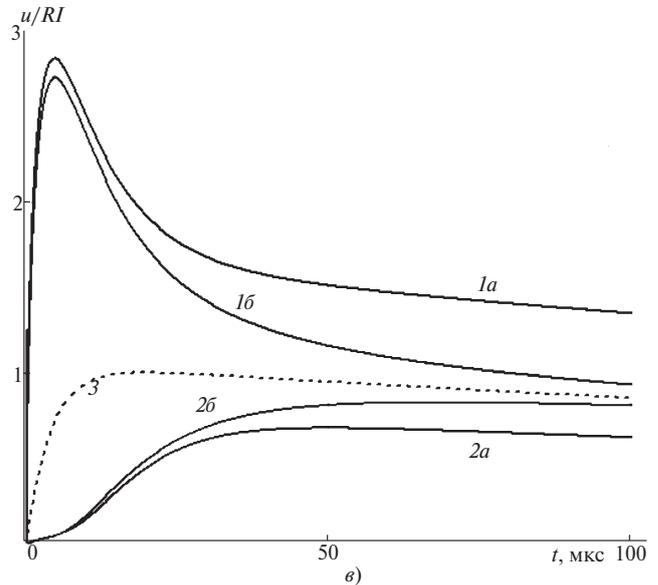
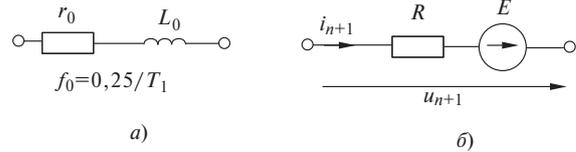


Рис. 4. Схема замещения внутреннего сопротивления стального стержня на эквивалентной частоте (а) и дискретная схема (б); изменение потенциала стального стержня ( $\mu=600$ ,  $\gamma=10^7$  См/м,  $l=100$  м,  $D=16$  мм,  $t=0,5$  м) в однородной земле ( $\rho=100$  Ом·м,  $\varepsilon=10$ ) в начале (1а и 1б) и конце (2а и 2б) стержня при импульсе тока 10/350 мкс (в); потенциал на стационарном сопротивлении  $R$  стержня (3)

где  $R_i$ ,  $i=1, \dots, N$  – дискретное переходное сопротивление интервала.

Выделяя первое слагаемое, окончательно получаем:

$$u_{n+1} = R_1 i_{n+1} - \sum_{m=2}^n (R_{n-m+1} - R_{n-m+2}) i_m = R_1 i_{n+1} + E_n. \quad (7)$$

Выражению (7) соответствует дискретная схема замещения с постоянным сопротивлением и переменной ЭДС (рис. 4,б). Эта схема аналогична дискретной схеме катушки (рис. 3,а), поэтому легко реализуется в шаговых алгоритмах МДС и ОМ. Таким образом, для учета частотно-зависимых элементов достаточно найти дискретные переходные сопротивления.

Рассмотрим пример. Сопротивление стального стержня при резко выраженном поверхностном эффекте имеет вид [8, т.3]:

$$Z(s) = \frac{l\sqrt{s\mu/\gamma}}{2\pi a},$$

откуда переходное сопротивление

$$z(t) = L^{-1}[Z(s)/s] = \frac{l\sqrt{\mu/\gamma}}{2\pi a\sqrt{\pi t}}.$$

Дискретные переходные сопротивления на интервалах

$$R_i = \frac{1}{h} \int_{(i-1)h}^{ih} z(y) dy = \frac{l \sqrt{\mu/\gamma}}{a \pi \sqrt{\pi h}} (\sqrt{i} - \sqrt{i-1}), \quad i=1, \dots, N$$

зависят лишь от номера шага и легко пересчитываются при изменении параметров стержня.

Применим разработанную методику для расчета потенциала стального стержня с учетом поверхностного эффекта при воздействии импульса 10/350 мкс и сравним результаты с данными, полученными на эквивалентной частоте (рис. 4, в). Погрешность расчета в области максимума потенциала не превышает 5% как в данной задаче, так и для других типичных стержней ЗУ. Низкая погрешность (помимо адекватного выбора эквивалентной частоты) объясняется наличием внешней индуктивности стержня, не зависящей от частоты.

С увеличением времени ( $t > T_1$ ) эквивалентная частота все больше не соответствует текущему моменту времени, поэтому погрешность приближенного расчета возрастает (рис. 4). Сопоставляя потенциал стержня с его активной составляющей  $R_i$ , к которой потенциал стремится по завершении ПП, видим (рис. 4), что расчеты на эквивалентной частоте не позволяют точно определить постоянную времени ПП и стационарное сопротивление ЗУ.

Таким образом, простая методика расчетов параметров стальных стержней на эквивалентной частоте обоснована для практически важной задачи расчета перенапряжений, но неприменима для синтеза эквивалентных схем замещения ЗУ и ряда других задач.

**Результаты.** Рассмотренная математическая модель и методы расчета ЗУ реализованы в Mathcad-программе ЗУМ, позволяющей проводить расчеты ЗУ, систем молниезащиты, уравнивания потенциала электрических станций и подстанций. Главной проблемой является высокая размерность задачи при ограниченных ресурсах 32-разрядной операционной системы. Решением являются формирование адекватных расчетных моделей ограниченной размерности (до 2000 элементов) для конкретного режима и замена фрагментов ЗУ эквивалентными  $RLC$ -схемами с заданными частотными характеристиками.

Ввод геометрии ЗУ выделен в отдельную задачу, решаемую в системе AutoCAD с послойной детализацией. Активные слои в  $dxf$ -формате импортируются в системе Mathcad, где проводятся расчеты. Компиляция трудоемких операций, не реализуемых стандартными функциями, позволяет ограничить время счета несколькими минутами. Результаты изображаются трехмерными графиками и анимационными файлами.

Средняя погрешность расчета статического сопротивления ЗУ в 12 задачах [1] составляет 2%. К аналогичным погрешностям приводит сопоставление входного сопротивления стержня, рассчитанного по МЭМС модели ЗУ и уравнениям длинной линии при  $l \leq \lambda/10$ , где  $\lambda$  – длина электромагнитной волны. При воздействии импульсных токов наблюдались запаздывание волны, двукратное усиление тока в режиме КЗ и напряжения в режиме х.х. в конце линии без потерь. Средством снижения погрешности является уменьшение длины элемента. В целом погрешность реализации МЭМС модели ЗУ в пределах принятых допущений будем оценивать в 5%.

В программе ЗУМ реализована процедура синтеза эквивалентных  $RLC$ -схем замещения ЗУ, которые, помимо практических приложений, являются удобным средством тестирования. В качестве примера найдем схему замещения заземлителя (рис. 5) относительно угловой точки. Рассчитаем переходное сопротивление  $z(t)$ , которое соответствует схеме замещения (рис. 5), применимой для частотного диапазона  $f \leq 1$  МГц с погрешностью до 2%.

**Вывод.** Разработана математическая модель ЗУ в виде многозвенной схемы с симметричными электромагнитосвязанными П-четырёхполюсниками (МЭМС модель ЗУ) и определены ее параметры. Расчет установившихся процессов в режиме КЗ проводится методом узловых потенциалов. Расчет переходных процессов в импульсных режимах проводится методом дискретных схем и операторным методом с учетом частотно-зависимых элементов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бургсдорф В.В., Якобс А.И. Заземляющие устройства электроустановок. – М.: Энергоатомиздат, 1987.

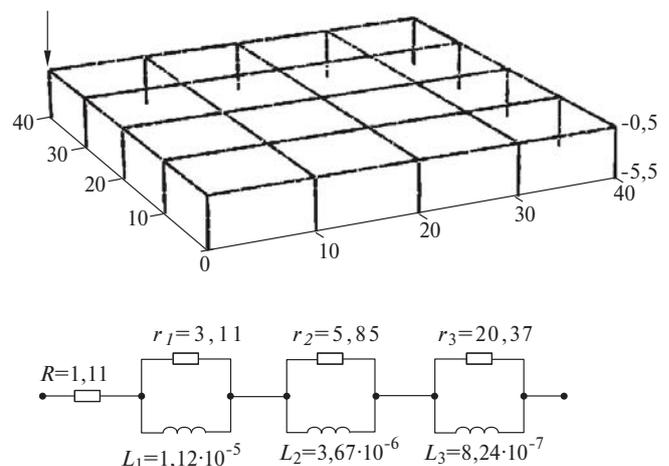


Рис. 5. Схема замещения заземлителя [1, с. 133] из медных стержней ( $\gamma=5,6 \cdot 10^7$  См/м,  $D=20$  мм,  $l=0,5$  м) в однородной земле ( $\rho=100$  Ом·м,  $\epsilon=10$ )

2. Дьяков А.Ф., Максимов Б.К., Борисов Р.К. и др. Электромагнитная совместимость в электроэнергетике и электротехнике/Под ред. А.Ф.Дьякова. – М.: Энергоатомиздат, 2003.
3. Кузнецов М.Б., Матвеев М.В. Численное моделирование процесса растекания тока молнии по заземляющему устройству здания: сравнение результатов эксперимента и расчетов. – Сб. докл. Второй Российской конф. по заземляющим устройствам. – Новосибирск: Изд. Сибир.энергет.академии, 2005.
4. Нестеров С.В. Применение интегральных уравнений для расчета заземлителя произвольной конфигурации в неоднородном грунте. – Сб. докл. Второй Российской конф. по заземляющим устройствам. – Новосибирск: Изд. Сибир.энергет.академии, 2005.
5. Шишигин С.Л. Векторная форма записи потенциала стержневого заземлителя в однородной и двухслойной земле.– Электричество, 2007, №7.
6. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики. – М.: Наука, 1985.
7. Zhang B., Cui X., Zhao Z., He J., Li L. Numerical analysis of the influence between large grounded grids and two-end grounded cables by the moment method coupled with circuit equations. – IEEE Trans. Power Del., 2005, vol. 20, N 2.
8. Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л. Теоретические основы электротехники. 3 т.– СПб: Питер, 2003.
9. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986.
10. Борисов Р.К., Колечицкий Е.С. Анализ погрешностей методов расчета и диагностики заземляющих устройств. – Сб. докл. Третьей Российской конф. по заземляющим устройствам. – Новосибирск: Изд. Сибирск.энерг.академии, 2008.
11. Шишигин С.Л. Математические модели и методы расчета заземляющих устройств. – Сб. докл. Третьей Российской конф. по заземляющим устройствам. – Новосибирск: Изд. Сибирск.энерг.академии, 2008.
12. Влах И., Сингхал К. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем/Пер. с англ.– М.: Радио и связь, 1988.
13. Коровкин Н.В., Миневич Т.Г. Универсальный метод построения макромоделей устройств по частотным характеристикам.– Изв. вузов России. Радиоэлектроника, 2006, вып. 3.

[12.03.09 ]

*А в т о р : Шишигин Сергей Леонидович в 1982 г. окончил электроэнергетический факультет Вологодского политехнического института. В 1988 г. в Ленинградском политехническом институте защитил кандидатскую диссертацию «Оптимизация формы электродов с осевой симметрией по условию ограничения максимальной напряженности». Докторант кафедры ТОЭ СПбГПУ.*